EJERCICIOS RESUELTOS Y PROPUESTOS DE DINÀMICA DE LÌQUIDOS REALES

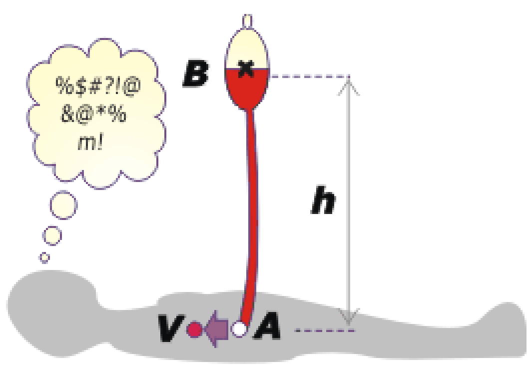
Fuente: **Ricardo Cabrera**
Departamento de Química Inorgánica, Analítica y Química Física
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires
3er. piso, Pab. II, Ciudad Universitaria
C1428EGA - Buenos Aires
ARGENTINA

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejercicio 1

A un paciente en un hospital se le efectúa una transfusión de sangre a través de una vena del brazo. El médico quiere suministrarle 500 cm3 en 20 minutos y utilizar una aguja de 40 mm de longitud y radio interior 0,5 mm. La presión intravenosa manométrica del paciente es de 15 mm de Hg. La bolsa con sangre se cuelga a cierta altura por encima del brazo de modo que la presión manométrica a la entrada de la aguja sea la adecuada. La viscosidad de la sangre a (37ºC) es de 2,1 mili Pa.s. Determine: a) la presión manométrica a la entrada de la aguja, b) la altura a la que hay que colocar la bolsa y, c) la velocidad media a la que entra la sangre en la vena.

Pasemos en limpio algunos datos. La presión en la bolsa, $\boldsymbol{P_B}$ es la de la atmósfera. La presión en la vena, $\boldsymbol{P_V}$, es dato del ejercicio (además todos los humanos, más o menos, tienen el mismo valor... aunque entres a la guardia en coma). La presión en la aguja, $\boldsymbol{P_A}$, tiene que ser un poco mayor que en la vena para lograr vencer la resistencia hidrodinámica y entrar al torrente sanguíneo, veremos cuánto.



Acá tenemos una ensalada de unidades... así que voy a ir pasando todo al sistema métrico... es lo más aséptico.

$\boldsymbol{P_B = 0\ mmHg = 0\ Pa}$

$\boldsymbol{P_A = \delta_S \,.\, g \,.\, h = ?}$

$P_V = 15\ mmHg = 2.000\ Pa$

Como te puse ahí, la presión en **A** será igual a la densidad de la sangre que es casi igual a la del agua ($\delta_S = 1{,}06\ .\ 10^3\ kg/m^3$), por la gravedad, por la altura a la que se coloque la bolsa... que ya la averiguaremos.

$Q = 500\ cm^3/20\ min = 4{,}17\ .\ 10^{-7}\ m^3/s$

La resistencia hidrodinámica que hay que vencer nos la da Poiseuille:

$R = (8/\pi)\ \eta\ l\ /\ r^4 =$

$R = (8/\pi)\ 2{,}1\ \ 10^{-3}\ Pa.s\ .\ 40\ 10^{-3}m\ /\ (0{,}5\ 10^{-3}m)^4 =$

$R = 3{,}424\ 10^9\ Pa.s.m^{-3}$

La diferencia de presión que logra vencer esa resistencia produciendo el caudal que calculamos antes, nos lo da la Ley de Ohm:

$\Delta P = Q\ .\ R$

$\Delta P = 4{,}17\ .\ 10^{-7}\ m^3 s^{-1}\ .\ 3{,}424\ 10^9\ Pa.s.m^{-3}$

$\Delta P = 1.427\ Pa = 1{,}427\ 10^3\ Pa$

esa diferencia de presión no es otra que la que entre la entrada y la salida de la aguja, o sea: $P_A - P_V$.

$\Delta P = P_A - P_V = 1{,}427\ 10^3\ Pa$

O sea que la presión en la entrada de la aguja tiene que ser **1.427 Pa** más alta que en la vena:

$P_A = 1{,}427\ 10^3\ Pa + 2\ .\ 10^3\ Pa$

$$\boxed{P_A = 3{,}427\ 10^3\ Pa}$$

Para saber la altura a la que hay que colocar la bolsa...

$h = P_A\ /\ \delta_S\ .\ g$

$h = 3{,}427\ 10^3\ Pa\ /\ 1{,}06\ .\ 10^3\ kg/m^3 .\ 10\ m/s^2$

$$\boxed{h = 0{,}32\ m}$$

La velocidad con que entra la sangre la calculamos con la relación: $\boldsymbol{Q = S\,v}$ (a veces llamada *continuidad*).

$$v = Q/S = Q/\pi\, r^2$$

$$v = 4{,}17\ .\ 10^{-7}\ m^3/s\ /\ \pi\ (0{,}5\ 10^{-3} m)^2$$

$$v = 0{,}53\ m/s$$

Ejercicio 2

En una persona adulta en reposo el caudal sanguíneo suele ser de unos 5 lit/min, siendo la presión media en la aorta de 100 mmHg y de 5 mmHg para la vena cava.

a) ¿Cuál es la resistencia hidrodinámica total del sistema circulatorio (llamada RTP, resistencia periférica total)?

b) ¿Cuál es la potencia media desarrollada por el corazón humano?

c) Si durante el ejercicio el caudal aumenta aproximadamente un 200% y la presión media en la aorta un 40%, manteniéndose prácticamente inalterada en la vena, ¿cómo se modifican las respuestas anteriores?

La diferencia de presión es de ***95 mmHg***. Pasemos ese valor y el del caudal a las unidades del sistema internacional y calculemos.

$$Q = 5\ l/min = 8{,}3 \times 10^{-5}\ m^3/s$$

$$\Delta P = 95\ mmHg = 1{,}24 \times 10^4\ Pa$$

Usamos la Ley de Ohm hidrodinámica: $\Delta P = Q\ .\ R$

$$RPT = \Delta P / Q$$

$$RPT = \frac{1{,}24 \times 10^4\ Pa}{8{,}3 \times 10^{-5}\ m^3/s}$$

$$RPT = 1{,}5 \times 10^8\ Pas/m^3$$

Ahora calculamos la potencia

$$Pot = \Delta P\ .\ Q$$

$$Pot = 1{,}24 \times 10^4\ Pa\ .\ 8{,}3 \times 10^{-5}\ m^3/s$$

$$Pot = 1{,}0\ W$$

Esta es la potencia que disipa el aparato circulatorio en su conjunto y que debe suministrar el corazón. Sin embargo, como toda máquina, consume más de lo que rinde: le cuesta más el automantenimiento. Mantenerse sano, tenso, alimentado, pulsátil, sincrónico y enamoradizo resulta en que nuestra bombita consume con una potencia total de aproximadamente ***5*** watts.

Ejercicio 3

Cuando se establece una diferencia de presión de 0,5 atm entre los extremos de cierto tubo recto de sección circular, fluye agua (coeficiente de viscosidad 1 cp) a razón de 30 litros por minuto. ¿Cuál sería el caudal si se reemplazara el caño por otro cuya longitud y diámetro son el doble que los del anterior, sin modificar la diferencia de presión?

Voy a llamar **A** a la situación inicial, en la que se establece una diferencia de presión y un caudal con cierto caño, y **B** a la siguiente situación en la que se cambia el caño y con la misma presión aparece un nuevo caudal. Acá reacomodo los datos:

$d_B = 2\ d_A$

Voy a trasladar esta relación a las secciones correspondientes. Acordate que la sección es igual a: $S = \pi\ r^2 = \pi\ (d/2)^2 = \pi\ d^2/4$. Entonces:

$S_A = \pi\ d_A^2/4$

$S_B = \pi\ d_B^2/4$

$S_B = \pi\ (2d_A)^2/4$

$S_B = \pi\ 4d_A^2/4$

$S_B = 4\ .\ \pi\ d_A^2/4$

$S_B = 4\ S_A$

Como Poiseuille habla de secciones al cuadrado, me fijo cómo se relacionan al estar al cuadrado. Para eso elevo ambos miembros al cuadrado:

$S_B^2 = (4\ S_A)^2$

$S_B^2 = 16\ S_A^2$

Con la longitud ocurre que:

$\Delta x_B = 2\ \Delta x_A$

Las diferencias de presión son iguales.

$\Delta P_B = \Delta P_A$

La descripción de Ohm-Poiseuille para ambos casos sería:

$Q_B\ R_B = Q_A\ R_A$

$$\frac{Q_B \ .\ 8\ .\ \pi\ .\ \eta\ .\ \Delta x_B}{S_B^2} = \frac{Q_A \ .\ 8\ .\ \pi\ .\ \eta\ .\ \Delta x_A}{S_A^2}$$

Hay varios factores comunes a ambos miembros...

$$\frac{Q_B \ .\ \Delta x_B}{S_B^2} = \frac{Q_A \ .\ \Delta x_A}{S_A^2}$$

Despejamos Q_B:

$$Q_B = \frac{Q_A \ .\ \Delta x_A \ .\ S_B^2}{S_A^2 \ .\ \Delta x_B}$$

Hacemos algunos reemplazos con las relaciones que escribimos antes:

$$Q_B = \frac{Q_A \ .\ \Delta x_A \ .\ 16\ S_A^2}{S_A^2 \ .\ 2\ \Delta x_A}$$

$Q_B = Q_A\ .\ 16/2$

$Q_B = Q_A\ .\ 8$

Pan comido...

$Q_B = 8\ .\ 30$ lit/min

$$\boxed{Q_B = 240 \text{ lit/min}}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Ejercicio 4

Compare el comportamiento dinámico del agua con la de la leche vacuna. Por una cañería de plástico rígido de 4 cm de diámetro y 2 m de largo, se hace circular agua a 20ºC, de viscosidad dinámica igual a 1 cp (centipoise). Se procede a la misma temperatura con leche vacuna de viscosidad dinámica igual a 3 cp, de densidad 1,032 g/cm^3. ¿Circularán los dos líquidos bajo régimen laminar? Verifíquelo.

Ejercicio 5

La viscosidad dinámica de la sangre humana a 20 ºC es de 3 mPa.s. Se realiza una prueba a esa temperatura, haciéndola pasar (hecha incoagulable) por una tubuladura de plástico de 0,5 cm de diámetro interior. Se pretende que el Número de Reynolds, no pase de 500. Siendo la densidad promedio de 1,05 g/cm^3, ¿a qué velocidad debería circular la sangre por la tubuladura?