

# Fluido viscoso. Ley de Poiseuille. Número de Reynolds. Turbulencia.

## ●Ley de Newton de la viscosidad

Fuerzas de viscosidad: fricción interna del fluido.

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{dv_x}{dy}$$

donde  $\eta$  es el coeficiente de viscosidad que depende del fluido.

No todos los fluidos satisfacen exactamente esta ley (ejemplo: la sangre, el petróleo, suspensiones, pinturas, ...) que son fluidos no newtonianos; y su viscosidad depende del gradiente de la velocidad.

En algunos, la viscosidad disminuye cuando el gradiente de la velocidad aumenta (ejemplo: pinturas, suspensiones, ...)

Aplicaciones: flujo en conductos cilíndricos. Ecuación de Poiseuille

Supongamos un cilindro de radio  $r$  contenido en otro cilindro de radio  $R$  y longitud  $L$ . Sobre el cilindro considerado actúan las siguientes fuerzas

$$\text{Presión} \quad F = \pi r^2 \Delta P$$

$$\text{Viscosidad} \quad F = -\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r L$$

Igualamos las fuerzas y obtenemos

$$\pi r^2 \Delta P = -\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r L \Rightarrow \frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta P}{2\eta L} r$$

la diferencia de presiones es lo que hace mover el fluido. Aislado tendremos el perfil parabólico de velocidades

$$v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2)$$

Para calcular el caudal utilizaremos esta expresión

$$Q = \int_0^R v(r) dA = \int_0^R v(r) 2\pi r dr = \frac{\pi R^4}{8\eta L} \Delta P$$

● Ecuación de Poiseuille (1835)

En función del coeficiente de viscosidad, se puede demostrar que la caída de presión para un flujo estacionario en una longitud  $L$  de un tubo circular de radio  $r$  es

$$\Delta P = \frac{8\eta L}{\pi R^4} Q$$

La Ley de Poiseuille se aplica sólo al flujo laminar (no turbulento) de un fluido de viscosidad constante que es independiente de la velocidad del fluido.

La sangre es un fluido complejo formado por partículas sólidas de diferentes formas suspendidas en un líquido. Los glóbulos rojos de la sangre, por ejemplo, son corpúsculos de forma de disco que están orientados al azar a velocidades bajas pero que resultan orientados a velocidades altas para facilitar el flujo. Así pues, la viscosidad de la sangre disminuye cuando aumenta la velocidad de flujo, de forma que la ley no es estrictamente válida. Sin embargo, dicha ley es una buena aproximación que es muy útil a la hora de obtener una comprensión cualitativa del flujo sanguíneo.

$$\Delta V = R_c I$$

Analogía con el corriente eléctrica (Ley de Ohm)

Importancia del exponente 4 en la regulación del caudal sanguíneo (ya que, pequeñas modificaciones del radio influyen mucho en el caudal).

● Aplicaciones prácticas

Permeabilidad de membranas:

$N$  canales cilíndricos de radios  $R$  y de longitud  $L$  (grosor de la membrana).

$$Q_N = NQ_1 = N \frac{\pi R^4}{8\eta L} \Delta P$$

donde  $Q$  es el caudal que atraviesa la membrana.

En algunas ocasiones, desconocemos  $R$  y  $N$ ; así que nos hace falta alguna otra ecuación para poder determinar separadamente las dos magnitudes.

● Turbulencia

La aparición de las turbulencias limita la ecuación de Poiseuille como vimos anteriormente.

Hay dos tipos de flujos, el flujo de régimen laminar de carácter suave y ordenado; y el flujo turbulento de carácter irregular y desordenado.

Dentro del fenómeno de la turbulencia se originan muchas colisiones, mucha fricción y un aumento considerable de la resistencia.

● Número de Reynolds

Cuando la velocidad de flujo de un fluido resulta que es suficientemente grande, se rompe el flujo laminar y se establece la turbulencia. La velocidad crítica por encima de la cual el flujo a través de un tubo resulta turbulenta depende de la densidad y de la viscosidad del fluido y del radio del tubo.

El flujo de un fluido puede caracterizarse mediante un número adimensional al que

denominamos número de Reynolds  $N_R$  que se define

$$N_R = \frac{2R\rho v}{\eta} \propto \frac{\text{inercia}}{\text{fricción}}$$

Se observa que cuando

**Número de Reynolds < 2000 ⇒ el flujo es laminar**

**Número de Reynolds > 3000 ⇒ el flujo es turbulento**

Y cuando  $2000 < \text{Número de Reynolds} < 3000$  el régimen del flujo puede ser laminar o turbulento.

## Movimiento de sólidos en fluidos. Ley de Stokes. Resistencia hidrodinámica

Cuando un objeto se mueve en un fluido, existen fuerzas entre el fluido y el objeto que dependen de la velocidad.

Recordemos que  $N_R = 2R\rho v/\eta$ , entonces

$$\text{Si } N_R \ll 1, \Rightarrow F \propto v \quad (\text{Domina la viscosidad})$$

$$\text{Si } N_R \gg 1, \Rightarrow F \propto v^2 \quad (\text{Domina la turbulencia})$$

● Movimiento de una esfera a  $N_R \ll 1$ . Ley de Stokes  
El origen de la fuerza es la fricción viscosa.

$$F = 6\pi\eta r v \quad \text{Ley de Stokes (1870)}$$

el factor  $6\pi$  vale para la esfera,  $\eta$  es la viscosidad.

Velocidad de sedimentación

Consideremos esta aplicación para una esfera sumergida en un fluido, entonces las fuerzas que actúan son

$$F_{\text{Arquímedes}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g,$$

$$F_{\text{Stokes}} = 6\pi\eta r v,$$

$$F_{\text{Peso}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 g,$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido, y  $\rho_0$  es la densidad del objeto.

Se llega a velocidad constante de sedimentación cuando

$$F_{\text{Peso}} = F_{\text{Arquimedes}} + F_{\text{Stokes}},$$

$$6\pi\eta r v = \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_0 - \rho)g$$

Y aislando  $v$  de la ecuación, tendremos la velocidad de sedimentación

$$v_{\text{sed}} = \frac{2r^2}{9\eta} (\rho_0 - \rho)g$$

El mismo caso, pero bajo la acción de una aceleración centrífuga como en el caso de una centrifugación vale

$$v_{\text{sed}} = \frac{2r^2}{9\eta} (\rho_0 - \rho)\omega^2 R$$

En este caso podemos observar que  $\omega^2 R$  puede ser mucho más grande que  $g$ , hasta 100.000 veces más grande!  $\Rightarrow$  la velocidad de sedimentación aumenta mucho respecto de la que produciría la gravedad.

Electroforesi: En este caso en lugar de  $g$ , actúa una fuerza eléctrica debida a un campo eléctrico  $E$

$$6\pi\eta r v = qE \quad \text{con } q \text{ como carga eléctrica,}$$

$$v = \frac{qE}{6\pi\eta r}$$

$$N_R \gg 1$$

● Movimiento de objetos a

A medida que va aumentando el  $N_R$ , aparecen inestabilidades (vórtices), además de haber mucha turbulencia en la zona posterior del objeto.

$$v \text{ elevada} \Rightarrow P \text{ baja} \quad \Delta P \approx \frac{1}{2} \rho v^2$$

en este caso se genera una fuerza

$$F = \frac{1}{2} \rho v^2 C_x A_x$$

donde  $A_x$  es la proyección de área frontal, y  $C_x$  el coeficiente de resistencia aerodinámica que depende de la forma del objeto.

De hecho en muchas ocasiones, una de las características importantes a la hora de escoger un automóvil es este coeficiente aerodinámico, ya que mientras menor sea su coeficiente, menor será la fuerza de resistencia.

Algunos ejemplos son: Opel Corsa(0,36), Ford Escort (0,38), Audi 100 (0,30), Mercedes 190 (0,33), y los peces desde(0,06) hasta (0,25).

Potencia consumida

$$P = Fv,$$

$$P = \frac{1}{2} \rho C_x A_x v^3$$